Chers futurs étudiants d'ECG1,

Nous vous demandons, d'ici la rentrée, de bien apprendre le cours ci-joint (ce sont des révisions) et de vous entraîner en faisant les exercices proposés.

Bonnes vacances et à bientôt.

M. Ponge, Mme Mayrand, enseignants de mathématiques en ECG1 à Kerichen

---

RÉVISIONS

1 Les ensembles de nombres

Définition 1

- $\mathbb{N}$ *désigne l'ensemble des* ***entiers naturels*** *:* $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
- $\mathbb{Z}$ *désigne l'ensemble des* ***entiers relatifs****. Il est constitué des entiers naturels ainsi que de leurs opposés :* $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$
- $\mathbb{Q}$ *désigne l'ensemble des* ***nombres rationnels*** *: les nombres rationnels sont tous les nombres pouvant s'écrire sous la forme* $\dfrac{a}{b}$ *où a est un entier relatif, et b un entier naturel non nul.*
- $\mathbb{R}$ *désigne l'ensemble des nombres réels.*

Remarque :
Le nombre $\dfrac{2}{30}$ est un nombre rationnel, il est aussi égal à $\dfrac{1}{15}$ (l'écriture n'est pas unique).
$\dfrac{19}{-2}$ est un nombre rationnel car il s'écrit : $\dfrac{-19}{2}$

2 Fractions

Soit a et b deux réels.

$\dfrac{a}{b}$ est défini si et seulement si $b \neq 0$	$\dfrac{a}{b} = 0 \iff a = 0$

Soit a, b, c, d des réels.

Pour $c \neq 0$: $a \times \dfrac{b}{c} = \dfrac{ab}{c} = \dfrac{a}{c} \times b$	pour $b \neq 0$ et $d \neq 0$: $\dfrac{a}{b} \times \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$

Pour $c \neq 0$: $\dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{c} = \dfrac{a+b}{c}$	$b \neq 0$ et $d \neq 0$: $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad+bc}{bd}$	pour $b \neq 0$: $\dfrac{-a}{b} = -\dfrac{a}{b} = \dfrac{a}{-b}$

Pour $a \neq 0$: $\dfrac{1}{\frac{1}{a}} = a$	pour $b \neq 0$ et $c \neq 0$: $\dfrac{\frac{a}{b}}{c} = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{1}{c} = \dfrac{a}{bc}$	pour $b \neq 0$, $c \neq 0$, $d \neq 0$: $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{d}{c} = \dfrac{ad}{bc}$

3 Identités remarquables

Forme développée	Forme factorisée
$a^2+2ab+b^2$	$(a+b)^2$
$a^2-2ab+b^2$	$(a-b)^2$
a^2-b^2	$(a+b)(a-b)$

4 Fonctions trinôme

4.1 Factorisation

Théorème 1

Soit a, b, c trois réels avec $a \neq 0$. On pose $\Delta = b^2-4ac$. Alors :

1) Si $\Delta > 0$, l'équation $ax^2+bx+c=0$ d'inconnue x admet deux solutions <u>réelles</u> distinctes x_1 et x_2 avec

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

De plus, pour tout réel x on a la factorisation suivante :

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$$

2) Si $\Delta = 0$, l'équation $ax^2+bx+c=0$ d'inconnue x admet une seule solution x_0 avec

$$x_0 = \frac{-b}{2a}$$

De plus, pour tout réel x on a la factorisation suivante :

$$ax^2+bx+c = a(x-x_0)^2$$

3) Si $\Delta < 0$, l'équation $ax^2+bx+c=0$ d'inconnue x n'admet pas de solution réelle.

4.2 Signe

On reprend les notations du théorème précédent, et on s'intéresse au signe de ax^2+bx+c, avec x un réel.

1) Si $\Delta > 0$, $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$ avec x_1 et x_2 les nombres <u>réels</u> définis au théorème précédent. Il suffit de faire un tableau de signes pour $a(x-x_1)(x-x_2)$. Par exemple, pour $a > 0$, cela donne : (en supposant que $x_1 < x_2$).

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
ax^2+bx+c		$+$	0	$-$	0	$+$	

On peut dire que ax^2+bx+c est du signe de $-a$ entre les racines x_1 et x_2, et du signe de a ailleurs.

2) Si $\Delta = 0$, $ax^2+bx+c = a(x-x_0)^2$ où x_0 est le nombre réel $\dfrac{-b}{2a}$.

- Pour $a > 0$:

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
ax^2+bx+c		$+$	0	$+$	

- Pour $a < 0$:

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
ax^2+bx+c		$-$	0	$-$	

3) Si $\Delta < 0$, quelle que soit la valeur du réel x, ax^2+bx+c garde le même signe, celui de a.

5 Exercices

5.1 Factoriser/développer

Exercice 1 Factoriser l'expression $f(x)$ suivante.

1. $f(x) = (7x-1)(4x+x^2) - x(7x-1)$
2. $f(x) = (2x-1)^3 - 2x + 1$
3. $f(x) = (x+3)(x^2-4) - (x^2+4x+4)(x-2)$

Exercice 2 Factoriser l'expression $f(x)$ suivante.

1. $f(x) = -(6x+7)(6x-1) + 36x^2 - 49$
2. $f(x) = 25 - (10x+3)^2$
3. $f(x) = (-9x-8)(8x+8) + 64x^2 - 64$

Exercice 3 Développer, réduire et ordonner suivant les puissances décroissantes de x, l'expression $f(x)$ suivante :

1. $f(x) = \left(2x - \dfrac{1}{2}\right)^3$
2. $f(x) = (x+1)^2(x-1)(x^2-x+1)$
3. $f(x) = (x^2+x+1)(x^2-x+1)$
4. $f(x) = (x-2)^2(-x^2+3x-1) - (2x-1)(x^3+2)$
5. $f(x) = (x^2+x+1)^2$
6. $f(x) = (2x+3)(5x-8) - (2x-4)(5x-1)$

5.2 Fractions

Exercice 4 On suppose que l'expression $f(x)$ suivante est bien définie. Écrire $f(x)$ sous la forme d'une seule fraction, la plus simple possible.

1. $f(x) = 2 + \dfrac{3}{x+2}$
2. $f(x) = \dfrac{2x}{1-x} - \dfrac{3+x}{4x}$
3. $f(x) = \dfrac{1-x^2}{(x-1)(2-x)}$
4. $f(x) = \dfrac{1}{x^2-4} - \dfrac{1}{x(x+2)} - \dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}$

5. $f(x) = \dfrac{4x^2 - 8x + 4}{(x-1)(4x+12)}$

6. $f(x) = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{2}{x+5}$

7. $f(x) = \dfrac{1}{2x-1} - \dfrac{1}{x-3}$

8. $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)(x-1)} - \dfrac{3}{x+1}$

9. $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 2x - 3} - \dfrac{1}{x-3}$

10. $f(x) = \dfrac{x+1}{x+1+\dfrac{1}{x+1}}$

Exercice 5
Simplifier au maximum :

1. $A = \dfrac{5}{6} - \dfrac{1}{3}$
2. $B = \dfrac{\frac{3}{4}}{2}$
3. $C = \dfrac{3}{\frac{4}{2}}$
4. $D = \dfrac{1}{2 + \dfrac{3}{2}}$
5. $F = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{-16}{21}$
6. $G = \dfrac{7}{8} \times \dfrac{2}{3}$
7. $H = \dfrac{3}{4} - \dfrac{11}{10}$

Exercice 6
Simplifier au maximum :

1. $A = \dfrac{1}{36} - \dfrac{1}{45} + \dfrac{1}{9}$
2. $B = \dfrac{1}{\frac{63}{40} \times \frac{16}{27}}$
3. $C = \dfrac{\frac{7}{9}}{\frac{4}{3}}$
4. $D = \dfrac{3}{5} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{5}{12}$
5. $F = \left(\dfrac{3}{2} - \dfrac{5}{4}\right)\left(\dfrac{9}{4} + \dfrac{21}{6}\right)$
6. $G = \dfrac{36}{25} \times \dfrac{15}{12} \times 5$
7. $H = \dfrac{-\frac{2}{15}}{-\frac{6}{5}}$
8. $\dfrac{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}}{\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}}$ (a et b non nuls, $a \neq b$)
9. $1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{a}}$ $(a \neq -1)$.

Exercice 7 On suppose que les expressions suivantes sont bien définies. Écrire sous la forme d'une seule fraction, la plus simple possible.

1. $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2} + \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x}$
2. $A = \dfrac{a^3 - b^3}{(a-b)^2} - \dfrac{(a+b)^3}{a-b}$
3. $g(x) = \dfrac{\frac{6(x+1)}{x(x-1)(2x-2)}}{\frac{2x+2}{x^2(x-1)^2}}$

Exercice 8
On suppose que les expressions suivantes sont bien définies. Écrire sous la forme d'une seule fraction, la plus simple possible.

1. $f(x) = \dfrac{x}{5} + \dfrac{1}{x}$
2. $f(x) = \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{(x-2)^2}$
3. $f(x) = \dfrac{3}{x+1} + \dfrac{1}{x(x+1)} - \dfrac{2}{x}$
4. $f(x) = \dfrac{x-3}{x-1} + \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{2}{(x-1)(x-2)}$
5. $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$
6. $1 + \dfrac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+1}}}$.
7. $\dfrac{ac - bc}{2cb - 2ac}$
8. $\dfrac{1 - x^2}{(x-1)^4}$
9. $\dfrac{1}{(x+1)^2} + \dfrac{-\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{1+x}{x}}$

5.3 Trinômes

Exercice 9
Factoriser les trinômes du second degré suivants :

1. $P(x) = 9x^2 - 12x + 4$
2. $Q(x) = x^2 + 3x + 2$
3. $R(x) = 3x^2 + 7x + 1$
4. $T(x) = -5x^2 + 6x - 1$
5. $U(x) = 2x^2 + 3x - 9$
6. $V(x) = -5x^2 + 9x + 2$

6 Réponses

Exercice 1

1. $f(x) = (7x - 1)(3x + x^2)$
2. $f(x) = 4x(x - 1)(2x - 1)$
3. $f(x) = (x - 2)(x + 2)$

Exercice 2

1. $f(x) = -6(6x + 7)$
2. $f(x) = 4(5x + 4)(-5x + 1)$
3. $f(x) = -8(x + 1)(x + 16)$

Exercice 3

1. $f(x) = 8x^3 - 6x^2 + \dfrac{3}{2}x - \dfrac{1}{8}$
2. $f(x) = x^5 - x^3 + x^2 - 1$
3. $f(x) = x^4 + x^2 + 1$
4. $f(x) = -3x^4 + 8x^3 - 17x^2 + 12x - 2$
5. $f(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$
6. $f(x) = 21x - 28$

Exercice 4

1. $f(x) = \dfrac{2x + 7}{x + 2}$
2. $f(x) = \dfrac{9x^2 + 2x - 3}{4x(1 - x)}$
3. $f(x) = \dfrac{1 + x}{x - 2}$
4. $f(x) = \dfrac{x + 4}{(x - 2)x(x + 1)(x + 2)}$
5. $f(x) = \dfrac{x - 1}{x + 3}$
6. $f(x) = \dfrac{3 - x}{(x + 1)(x + 5)}$
7. $f(x) = -\dfrac{x + 2}{(2x - 1)(x - 3)}$
8. $f(x) = \dfrac{-3x + 4}{(x + 1)(x - 1)}$
9. $f(x) = \dfrac{x - 1}{(x - 3)(x + 1)}$
10. $f(x) = \dfrac{(x + 1)^2}{(x + 1)^2 + 1}$

Exercice 5

1. $A = \frac{1}{2}$
2. $B = \frac{3}{8}$
3. $C = \frac{3}{2}$
4. $D = \frac{2}{7}$
5. $F = -\frac{4}{7}$
6. $G = \frac{7}{12}$
7. $H = -\frac{7}{20}$

Exercice 6

1. $A = \frac{7}{60}$
2. $B = \frac{15}{14}$
3. $C = \frac{7}{12}$
4. $D = \frac{13}{30}$
5. $F = \frac{23}{16}$
6. $G = 9$
7. $H = \frac{1}{9}$
8. $\frac{a+b}{b-a}$
9. $\frac{2a+1}{a+1}$

Exercice 7

1. $f(x) = -\frac{1}{x(x+1)^2}$
2. $A = -\frac{ab}{a-b}$
3. $g(x) = \frac{3}{2}x$

Exercice 8

1. $f(x) = \frac{x^2+5}{5x}$
2. $f(x) = \frac{(x-5)(x+1)}{9(x-2)^2}$
3. $f(x) = \frac{x-1}{(x+1)x}$
4. $f(x) = \frac{x^2-4x+5}{(x-1)(x-2)}$
5. $\frac{bc+ac+ab}{abc}$
6. $\frac{8}{5}$
7. -1
8. $-\frac{1+x}{(x-1)^3}$
9. $-\frac{1}{x(x+1)^2}$

Exercice 9

1. $P(x) = (3x-2)^2$
2. $Q(x) = (x+1)(x+2)$
3. $R(x) = 3\left(x + \frac{7-\sqrt{37}}{6}\right)\left(x + \frac{7+\sqrt{37}}{6}\right)$
4. $T(x) = -5(x-1)\left(x - \frac{1}{5}\right)$
5. $U(x) = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)(x+3)$
6. $V(x) = -5\left(x + \frac{1}{5}\right)(x-2)$